Analyse eines Kartentricks. Ein Beispiel zur Anwendung von Mathematik

Franz SCHOBERLEITNER, Univ. Linz

1. Einleitung

Von vielen Seiten wird (mit Berechtigung) die Forderung erhoben, der Mathematik-Unterricht der AHS müßte sich verstärkt der Anwendung von Mathematik widmen. Das Schlagwort von der *Anwendungsorientierung*, das sich wohl jeder Lehrende gern auf seine Fahnen heftet, kann in der Praxis aber sehr Unterschiedliches meinen.

- Was ist "Angewandte Mathematik" ?
- Welche Kriterien muß eine Problemstellung erfüllen, um diese Bezeichnung zu verdienen?
- Liegen "echte Anwendungen" oder nur sogenannte "eingekleideten Aufgaben" vor?
- Läßt sich unter den gegebenen Bedingungen des Mathematik-Unterrichts überhaupt echtes Anwenden von Mathematik verwirklichen?

Die Ansichten von Mathematikern und insbesondere Mathematik-Didaktikern in diesen und in verwandten Fragen gehen weit auseinander.

Unbestritten ist aber das Ziel:

Schüler sollen durch das Anwenden von Mathematik (auf ein Problem, das aus der "Welt außerhalb der Mathematik" stammt) etwas Lernen über "die Welt", aber auch über "die Mathematik".

Es kann nicht Sinn der Sache sein, "irgendwelche" Anwendungen in den Unterricht einzubauen, die auf Schulniveau (einigermaßen) bewältigt werden können. Aufgabe des Lehrenden (und des Didaktikers) ist es, Fragestellungen *aus der Lebenswelt der Schüler* zu suchen, bei denen der Einsatz von Mathematik etwas bringt ...

In diesem Zusammenhang weise ich auf folgende Problematik hin:

Die Tatsache, daß eine bestimmte Anwendung von Mathematik "allgemein" (von vielen Mathematikern, Lehrern, Praktikern, ...) als wichtig angesehen wird (*"objektiv" relevant* ist), bedeutet noch lange nicht, daß Schüler diese auch *subjektiv als sinnvoll bzw. bedeutungsvoll* erleben.

Die didaktischen Schwierigkeiten bei der Behandlung von diversen "physikalischen Anwendungen" zeigen diese Diskrepanz deutlich.

Anwendung der Mathematik kann grundsätzlich zweierlei leisten:

- Mathematik *"zum Finden von Problemlösungen"* (z.B.: Optimierungsprobleme verschiedener Art,...)
- Mathematik als *"Mittel zum Verstehen"*, als *"Aufklärungsmittel"*

wobei es natürlich einen starken inneren Zusammenhang dieser beiden Aspekte gibt.

Ich werde hier ein einfaches Beispiel präsentieren, bei dem Mathematik in erster Linie als "Aufklärungsmittel" fungiert: die Analyse eines Kartentricks.
(Natürlich beruht nicht *jeder* Kartentrick auf mathematischen Tatsachen; häufig geht es um eine Überrumpelung des Mitspielers, um eine Scheinaktion oder dergleichen.)

Das Beispiel zeigt den *Nutzen mathematischer Analyse*:

- Es wird klar, *warum* der Trick funktioniert
- Es wird sichtbar, was in der konkreten Durchführung des Tricks *wesentlich* ist und was verändert oder weggelassen werden kann.
- Es wird ermöglicht, selber *Variationen* des Tricks zu entwickeln
- Es ergeben sich *theoretische Aussagen* darüber, mit welchen "Ausgangszahlen" die entsprechende Trickvariation funktioniert und mit welchen nicht ....

Für den Schulunterricht eignet sich dieses Beispiel aus mehreren Gründen:

- Es ist leicht *motivierbar*. (Kartentricks üben Faszination aus ...)
- Es verlangt zunächst nur *wenig mathematisches Grundwissen*.
- Es zeigt die *Eigenart und die Kraft der mathematischen Analyse* von "Lebenswelt-Situationen" (vgl. oben)
- Es eröffnet zahlreiche Möglichkeiten für *Schüleraktivitäten* (einzeln oder in Gruppen)
- Es ermöglicht (hinterher) den Bezug zu mehreren Bereichen der "Schulmathematik", etwa: rekursiv definierte Folgen; Fixpunkte von Funktionen;....

2. Der Trick und seine Analyse

2.1. Beschreibung

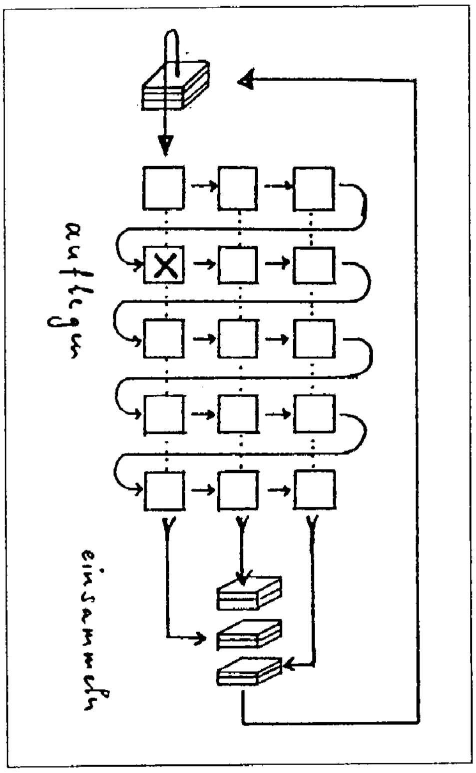
Der "Zauberer" (Z) hat einen Stoß von 15 (verschiedenen) Spielkarten. Er mischt und bittet den Mitspieler (S), sich eine Karte auszusuchen, sie sich zu merken, aber ihm nicht bekanntzugeben. Dann legt er die Karten in einem rechteckigen Schema auf, und zwar in 5 Reihen zu je 3 Spalten, reihenweise von links oben nach rechts unten. S gibt nun bekannt, in welcher der 3 Spalten die ausgewählte Karte liegt. Z sammelt daraufhin die Karten wieder ein, jetzt aber spaltenweise von oben nach unten, und bildet 3 "Stößchen"; er legt diese nun so übereinander, daß das Stößchen der von S identifizierten Spalte in der Mitte zu liegen kommt.
Dieser Vorgang wird von Z zwei weitere Male durchgeführt (d.h: er legt die Karten in dem beschriebenen rechteckigen Schema auf, S bezeichnet die Spalte, in der die Karte liegt, Z sammelt wieder ein usw.)
Nach dem dritten Durchgang kann Z die von S ausgewählte Karte identifizieren: Er zählt - natürlich im Geheimen, möglichst intensives Nachdenken vortäuschend - die Karten der Reihe nach vom Stoß herunter und behauptet mit Erfolg, die achte Karte sei die gesuchte!

2.2 Analyse und mathematische Beschreibung

Der geschilderte Spielablauf kann aus zwei Schritten aufgebaut dargestellt werden:

(1) **Auflegen** der Karten
(2) **Einsammeln** der Karten, nachdem die Spalte identifiziert wurde

Ikonisch dargestellt:



Beginnen wir die mathematische Beschreibung des Ablaufes damit, die Karten numeriert zu denken mit den Zahlen 0,1,2,...,14.

Im Schritt (1) *("Auflegen")* wird jeder Kartennummer eine bestimmte Position im rechteckigen Auflegeschema zugeordnet. (Es ist günstig, die Zählung von Zeilen und Spalten dieses Schemas mit 0 zu beginnen; dies vereinfacht das Auffinden des Funktionsterms.)

	0	*1*	*2*
0	0	1	2
1	3	4	5
2	6	7	8
3	9	10	11
4	12	13	14

Man findet leicht, daß folgende Zuordnung vorliegt:

Nummer → (Zeile, Spalte)

x → (z , s)

mit $z = [\frac{x}{3}]$, $s = x - 3z = x - 3.[\frac{x}{3}]$

Im Schritt (2) *("Einsammeln")* werden nun die Karten in eine neue Reihenfolge gebracht. Die ausgewählte Karte mit der Nummer x erhält dabei eine neue Nummer y. Aufgrund der beschriebenen Vorgangsweise des Einsammelns gilt:

$$y = 5 + z = 5 + [\frac{x}{3}]$$

Jeder Durchlauf (bestehend aus den Schritten (1) und (2)) kann daher beschrieben werden durch die Zuordnung:

$$x \to [\frac{x}{3}] + 5$$

Da die ausgewählte Karte zunächst irgendeine Nummer $x \in \{0,1, .., 14\}$ haben kann, betrachten wir die Funktion

$$f: A \to A \qquad \text{mit } A=\{0,1,2,..,14\}$$
$$x \to f(x) := 5 + [\frac{x}{3}]$$

Bemerkung:
f(x) gibt nicht für *jede* Karte x ihre neue Nummer nach dem Durchlauf an, sondern: f(x) ist die neue Nummer der ausgewählten Karte, falls diese zuvor die Nummer x hatte.

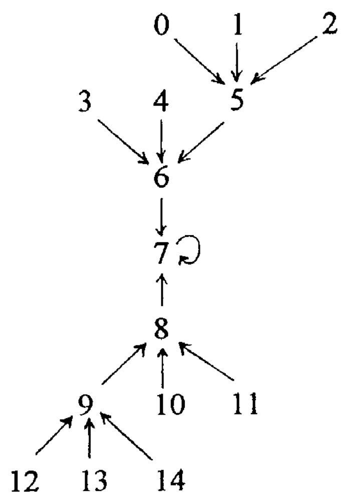
Nun muß gemäß der Beschreibung des Tricks diese Funktion dreimal hintereinander angewendet werden. Was dabei passiert, kann in folgender Tabelle vollständig erfaßt werden:

0	→	5	→	6	→	7		8	→	7	→	7	→	7
1	→	5	→	6	→	7		9	→	8	→	7	→	7
2	→	5	→	6	→	7		10	→	8	→	7	→	7
3	→	6	→	7	→	7		11	→	8	→	7	→	7
4	→	6	→	7	→	7		12	→	9	→	8	→	7
5	→	6	→	7	→	7		13	→	9	→	8	→	7
6	→	7	→	7	→	7		14	→	9	→	8	→	7
7	→	7	→	7	→	7								

Damit ist die Erklärung des Tricks bereits gelungen:

Egal, die wievielte Karte ursprünglich ausgewählt worden ist, nach drei Durchläufen hat sie die Nummer 7, ist sie also die achte Karte!

Eine andere Art der Darstellung, die die Aussage der Tabelle strukturiert und übersichtlich darbietet, wäre folgender Baum:



Was in dieser Darstellung gut zum Ausdruck kommt, wird in der Fachsprache so formuliert:

7 ist ein "anziehender Fixpunkt" der Funktion f

(Eine Präzisierung dieses Begriffs erfolgt später.)

Es empfiehlt sich im Unterricht, dieses Phänomen in einem konkreten Beispiel (etwa mit der ursprünglichen Kartennummer 2) Schritt für Schritt nachzuvollziehen - in der tatsächlichen Durchführung parallel zur mathematischen Beschreibung. Man beobachtet dabei die "Wanderung" der gewählten Karte durch das Auflegeschema.

Aus der mathematischen Untersuchung des Tricks erkennt man auch, was bei der Durchführung des Tricks *wesentlich* ist und worauf es nicht ankommt: etwa auf die Reihenfolge des Einsammelns der Karten in den Spalten, die die gesuchte Karte nicht enthalten.
Man kann also als Zauberer die Durchführung des Tricks sehr undurchsichtig gestalten.........
Schüler könnten dabei ihrer Phantasie freien Lauf lassen.

3. Weiterführende Untersuchungen

Analog können nun *Variationen des Tricks* untersucht werden, bei denen die Anzahl der Karten bzw. die Anzahl der Spalten (im Auflegeschema) geändert werden.

Beispiele:

1. 21 Karten werden in 3 Spalten aufgelegt.
   Es zeigt sich, daß nach 3 Durchgängen die ausgewählte Karte an der 11.Stelle liegt.

2. 16 Karten werden in 4 Spalten aufgelegt.
   Man muß hier zusätzlich vereinbaren, wie das Einsammeln der Karten zu geschehen hat; etwa so, daß das Stößchen mit der ausgewählten Karte als zweites genommen wird.
   In diesem Fall ist die ausgewählte Karte bereits nach 2 Durchläufen an der 6.Stelle.

3. 18 Karten werden in 3 Spalten aufgelegt.
   Hier tritt der Fall auf, daß die zugehörige Funktion f mit $f(x) := [\frac{x}{3}] + 6$ zwei Fixpunkte besitzt, nämlich 8 und 9.
   Damit kann in diesem Fall der Kartentrick nicht funktionieren!

Schüler können hier (am besten in Kleingruppen) selber vielfältig tätig werden: mit den Karten spielen; Funktionsterme aufstellen; Tabellen erstellen; Bäume zeichnen; Vermutungen aufstellen; versuchen, Fixpunkte zu berechnen; ....

Eine einfache Methode zur *Berechnung* der gesuchten Fixpunkte ist folgende:

Beispiel 2:

$$f(x) = x$$

$$[\frac{x}{4}] + 4 = x$$

$$\frac{x-k}{4} + 4 = x \qquad \textit{für ein } k \in \{0,1,2,3\} \qquad \textit{(das von x abhängt)}$$

$$\frac{16-k}{3} = x \qquad \textit{für ein } k \in \{0,1,2,3\}$$

Da x eine *natürliche Zahl* sein muß, kommt nur $k=1$ und damit $x=5$ in Frage.

Beispiel 3:

$$f(x) = x$$

$$[\frac{x}{3}] + 6 = x$$

$$\frac{x-k}{3} + 6 = x \qquad \textit{für ein } k \in \{0,1,2\} \qquad \textit{(das von x abhängt)}$$

$$\frac{18-k}{2} = x \qquad \textit{für ein } k \in \{0,1,2\}$$

Hier erhält man sowohl für $k=0$ als auch für $k=2$ eine natürliche Zahl.
f besitzt also die beiden Fixpunkte 8 und 9.

Mathematikern (und hier wohl auch den meisten Schülern) drängt sich nach Bearbeitung obiger und ähnlicher Beispiele die Frage auf nach allgemeinen Aussagen:

Sei **c** die Anzahl der Spalten ($c>2$)
d die Anzahl der Karten, die man vor der markierten Spalte einsammelt (das ist in der ursprünglichen Trickversion die Anzahl der Reihen.)
m die Anzahl der verwendeten Karten

(1) *Funktioniert die entsprechende Trickvariation ?*
(2) *Wie viele Durchläufe sind erforderlich?*
(3) *An welcher Stelle befindet sich zuletzt die gesuchte Karte ?*

Es ist klar, daß diese Fragen behandelt werden können durch Untersuchung der Funktion

$$f: \qquad x \rightarrow f(x) := [\frac{x}{c}] + d$$

Antwort auf die Fragen (1) und (3) gibt der folgende Satz:

Satz 1:

Falls *c-1 kein Teiler von d* ist, dann gilt:
f besitzt *genau einen Fixpunkt* $x_0 = [\frac{c.d}{c-1}]$,
und dieser ist *anziehend*,
d.h.: es gibt eine natürliche Zahl n, so daß $f^n(x) = x_0$ für alle $x \in \{0, ..., m-1\}$.

Falls *c-1 ein Teiler von d* ist, dann gilt:
f besitzt *zwei Fixpunkte*, nämlich $x_1 = \frac{c.d}{c-1}$ *und* $x_2 = \frac{c.d}{c-1} - 1$

Beweis:

(1) Wir berechnen die Fixpunkte nach der in den Beispielen verwendeten Methode:

$$f(x) = x$$
$$[\frac{x}{c}] + d = x$$
$$\frac{x-k}{c} + d = x \qquad \text{für ein } k \in \{0,1,..,c-1\}$$
$$\frac{cd-k}{c-1} = x \qquad \text{für ein } k \in \{0,1,..,c-1\}$$

Der Zähler dieses Bruches kann c aufeinanderfolgende Werte annehmen; mindestens einer dieser Werte, höchstens aber zwei sind durch c-1 teilbar.

- falls c-1 ein Teiler von cd ist (d.h.: c-1 ist ein Teiler von d),
  dann existieren *zwei* Fixpunkte:

  $k = 0$ liefert: $x = \frac{cd}{c-1}$ $\qquad$ $k = c\text{-}1$ liefert $x = \frac{cd}{c-1} - 1$

- falls c-1 kein Teiler von cd ist (d.h.: c-1 ist kein Teiler von d),
  dann existiert nur *ein* Fixpunkt:

  $$x = [\frac{cd}{c-1}]$$

(2) Wir zeigen, daß im Falle eines einzigen Fixpunktes dieser ein anziehender Fixpunkt ist.
Sei $x \in A$ beliebig; wir müssen zeigen, daß man durch wiederholtes Anwenden der Funktion f den Fixpunkt x_0 erhält.
Wir zeigen das für den Fall: $x < x_0$; der andere Fall wird analog dazu bewiesen.

Es gilt:	(a)	$x < x_0$	$\Rightarrow$	$f(x) \leq f(x_0)$	(f ist monoton wachsend)
	(b)	$x < x_0$	$\Rightarrow$	$x < f(x)$	(wird unten bewiesen)

Damit erhält man insgesamt:

$$x < x_0 \quad \Rightarrow \quad x < f(x) \le f(x_0) = x_0$$

Das heißt:
Bei jeder Anwendung von f wird der Wert ("das Folgenglied") größer - wegen der Ganzzahligkeit mindestens um 1- , überschreitet aber den Fixpunkt x_0 nicht. Damit muß der Fixpunkt in endlich vielen Schritten erreicht werden.

Beweis von (b):

Da x_0 *einziger* Fixpunkt ist und x eine *natürliche* Zahl kleiner x_0, gilt analog zu (1):

$$x < \frac{cd - k}{c-1} \qquad \text{für } alle \ k \in \{0,1, .., c-1\}$$

und damit:

$$\frac{x - k}{c} + d > x \qquad \text{für } alle \ k \in \{0,1, .., c-1\}$$

Insbesondere also: $f(x) > x$ ■

Offen ist noch die Frage (2) nach der Anzahl der notwendigen Durchläufe.
Diese Frage kann so präzisiert werden:

Es sei d kein Vielfaches von c-1
Wie groß muß die Anzahl n der Iterationen mindestens sein, damit gilt:

$$f^n(x) = x_0 \quad \text{für alle } x \in \{0,1,2,....,m-1\}$$

Diese Frage ist (auch für Schüler) einfach zu beantworten:

Man startet mit $x = 0$ und bestimmt die Anzahl der notwendigen Iterationen n_1
Man startet mit $x = m-1$ und bestimmt die Anzahl der notwendigen Iterationen n_2.
Dann gilt: $n = \max\{n_1, n_2\}$.

Diese Methode ist (aufgrund der erkannten Eigenschaften von f) unmittelbar einsichtig; ein ausführlicher Beweis kann sehr einfach mit den im Beweis von Satz 1 gezeigten Ungleichungen formuliert werden.

Wesentlich schwieriger ist es, eine **Formel** anzugeben, mit der die Zahl der notwendigen Iterationen n direkt aus den Parametern c , d und m berechnet werden kann. Für Schüler scheint mir dies ein zu großer und vor allem unnötiger Aufwand zu sein.

Für den Spezialfall m = c.d (wie in der ursprünglichen Trickversion) gibt der folgende Satz Auskunft:

Satz 2:

Sei $c>2$, d kein Vielfaches von $c-1$; $A:=\{0,1,2,\dots,cd-1\}$;
$p:=$ Rest der Division $cd:(c-1)$

Wenn n die Ungleichung $c^{n-1} \geq \dfrac{d.(c-2)}{c-1-p}$ erfüllt, dann gilt für alle $x \in A$: $f^n(x) = x_0$

Beweis:

Wir betrachten die Funktion f zunächst auf ganz Z definiert. Die Behauptung von Satz 1 bleibt richtig, wie man aus dem Beweis sieht, der die Menge A gar nicht verwendet.
Wir teilen nun Z in Klassen ein, je nachdem, wieviele Iterationen notwendig sind, um den Fixpunkt zu erreichen.

$$U_k := \{x \in Z \mid x<x_0 \wedge f^k(x)=x_0 \wedge f^{k-1}(x) \neq x_0\}, \quad O_k := \{x \in Z \mid x>x_0 \wedge f^k(x)=x_0 \wedge f^{k-1}(x) \neq x_0\} \qquad (k \geq 1)$$

Klarerweise gilt: $f(U_k) = U_{k-1} \;\wedge\; f(O_k) = O_{k-1} \qquad (k \geq 2)$

Da bei der Funktion f jedes $y \in Z$ Bild von genau c ganzen Zahlen ist, erhält man:
$$|U_k| = c.|U_{k-1}| \;\wedge\; |O_k| = c.|O_{k-1}| \qquad (k \geq 2)$$

Sei nun $p:=|U_1|$, $q:=|O_1|$; dann gilt:
$$p = \text{Rest der Division } cd:(c-1) \quad \left(= cd - \left[\frac{cd}{c-1}\right].(c-1)\right),$$
$$q = c-1-p$$

Wir bezeichnen: $A_1:=\{x \in A \mid x<x_0\}$, $A_2:=\{x \in A \mid x>x_0\}$

Nun ist n so zu bestimmen, daß $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n \supseteq A_1 \;\wedge\; O_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_n \supseteq A_2$

Das führt durch Betrachten der Mächtigkeiten auf die Bedingungen:

(1) $p + p.c + p.c^2 + p.c^3 + \dots + p.c^{n-1} \geq x_0$

(2) $q + q.c + q.c^2 + q.c^3 + \dots + q.c^{n-1} \geq cd-1-x_0$

Aus (1) erhält man:
$$p.\frac{c^n-1}{c-1} \geq x_0$$
$$p.(c^n-1) \geq x_0.(c-1) = \left[\frac{cd}{c-1}\right].(c-1) = cd-p$$

(1′) $c^{n-1} \geq \dfrac{d}{p}$

Aus (2) erhält man analog:
$$q.\frac{c^n-1}{c-1} \geq cd-1-x_0$$
$$q.(c^n-1) \geq (cd-1)(c-1) - \left[\frac{cd}{c-1}\right].(c-1) = (cd-1)(c-1)-(cd-p) = c^2d-2c-q$$
$$q.c^n \geq cd(c-2)$$

(2′) $c^{n-1} \geq \dfrac{d.(c-2)}{q} = \dfrac{d.(c-2)}{c-1-p}$

Wir zeigen noch, daß die Gültigkeit von (2′) stets die Gültigkeit von (1′) nach sich zieht; damit ist dann der Satz bewiesen.
$$\frac{d}{p} \leq \frac{d.(c-2)}{c-1-p} \;\Leftrightarrow\; c-1-p \leq p(c-2) \;\Leftrightarrow\; c-1 \leq pc-p=p(c-1)$$
und letzteres gilt sicher, da $p \geq 1$ ist.

■

4. Ausblick - Einbettung in die "Schulmathematik"

(1) Der mathematische Kern der Problemlösung bestand darin, eine (hier sehr einfache) Funktion iterativ anzuwenden. Dieses grundlegende Prinzip taucht in der gesamten Mathematik auf verschiedenen Abstraktions- und Komplexitätsebenen auf. Manche Didaktiker bezeichnen *Iteration* als eine *Fundamentale Idee der Mathematik*.
Die Frage nach der *Konvergenz* der erzeugten Folge führt dabei immer auf die Suche nach *anziehenden Fixpunkten* der iterierten Funktion.

Meines Erachtens kommt diese Sichtweise im traditionellen Unterricht über Folgen und Konvergenz viel zu kurz. Ich plädiere entschieden dafür, das Thema "Konvergenz von Folgen" anhand von rekursiv definierten Folgen zu behandeln und die dabei traditionell verwendeten Folgen mit rationalem Term zurückzudrängen. Das hätte eine Fülle von Vorteilen, über die zu reden an dieser Stelle zu weit führen würde.

Natürlich liegt im hier untersuchten Beispiel nur ein einfacher Spezialfall vor:

- "Konvergenz" bedeutet bei einer Folge mit *ganzzahligen* Gliedern einfach, daß sie ab einem gewissen Index konstant ist.
- Der Begriff "anziehender Fixpunkt" muß im allgemeinen natürlich sorgsamer definiert werden:
  Für einen Fixpunkt a der Funktion f definiert man das Einzugsgebiet von a durch: $E(a) := \{x |\ \lim f^n(x) = a\ \}$ und nennt einen Fixpunkt anziehend, wenn es eine Umgebung U von a gibt, so daß $U \subseteq E(a)$.

(2) Manche Lehrbücher enthalten Aufgaben, die *-genau betrachtet-* auf das in unserem Beispiel verwendete Modell führen.
(z.B.: REICHEL u.a., Lehrbuch der Mathematik 7, im Kapitel "Mathematische Beschreibung dynamischer Systeme und Prozesse")

Beispiel:

Die Zahl der Fische in einem Teich reduziert sich im Lauf eines Jahres (durch Fang, Tod,..) um etwa 10%. Um dem entgegenzuwirken, werden jedes Frühjahr 50 Fische ausgesetzt. Man schätzt, daß gegenwärtig etwa 350 Fische im Teich sind.

- *Wie entwickelt sich der Fischbestand auf lange Sicht ?*
- *Gibt es einen "Grenzwert" ? Wie hängt dieser vom (geschätzten) Anfangswert ab?*

Man wird hier -standardmäßig- zunächst folgendermaßen modellieren:

x_n ...Anzahl der Fische im Jahr n (zu Jahresende ..)
$x_0 = 300$
$x_{n+1} = (x_n+50).0,9 = 0,9x_n+45$ d.h.: $x_{n+1} = f(x_n)$ *mit* $f(x) = 0,9x+45$

Man erhält: $x_1 = 360$
$x_2 = 369$
$x_3 = 377,1$ *Soll man die Dezimalen "abschneiden"?*
Soll man auf Ganze runden?
Soll man einfach weiterrechnen?

Entscheidet man sich für das Abschneiden der Dezimalstellen, so ersetzt man f eigentlich durch

$$f_1(x) := [0,9x] + 45$$

Wie man leicht nachrechnet, besitzt f_1 10 Fixpunkte: 441, 442, ..., 450.
Ist $x_0 < 441$, so gilt: $\lim x_n = 441$
Ist $x_0 > 450$, so gilt: $\lim x_n = 450$

Im Gegensatz dazu hat man im Standardmodell Konvergenz gegen 450, unabhängig vom Anfangswert.
(Wenn man die Glieder auf Ganze rundet, iteriert man $f_2(x) := [0,9x+0,5]+45$)

Beispiele der eben genannten Art führen also *-genau betrachtet-* oft auf die iterierte Anwendung einer Funktion

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad x \to f(x) := [a.x] + b \qquad \text{mit } a\in\,]0,1[,\ b\in\mathbb{N}$$

Es gilt folgender

Satz 3:

(1) Die Menge der Fixpunkte von $f: x \to f(x) := [a.x] + b$ mit $a\in\,]0,1[,\ b\in\mathbb{N}$ ist gegeben durch

$$F = E \cap \mathbb{N} \qquad \text{mit } E := \left]\frac{b-1}{1-a}, \frac{b}{1-a}\right[$$

(2) Sei p_1 das kleinste Element von F, p_k das größte Element von F. Dann gilt

$$x_0 < p_1 \Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}: x_n = p_1$$
$$x_0 > p_k \Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}: x_n = p_k$$
$$x_0 \in F \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}: x_n = x_0$$

Dieser Satz kann analog zu Satz 1 bewiesen werden. Er enthält Satz 1 als Spezialfall, wie man sich leicht überlegen kann.